

УДК 535.2

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

А.М. Башаров

Аннотация

Построена модель сверхизлучения, демонстрирующая особенности детерминированной хаотической динамики. Наиболее наглядно это проявилось в сведении уравнений модели к системе уравнений Лоренца с параметрами, лежащими в области хаотического режима.

Ключевые слова: регулярная и стохастическая динамика, Сверхизлучение, осцилляторный режим, стохастизация, уравнения Лоренца.

Введение

Коллективное спонтанное излучение возбужденных атомов, известное как сверхизлучение [1], является фундаментальным явлением природы, и различные его аспекты уже более сорока лет привлекают внимание исследователей (см. монографии [2, 3]). Обычно, говоря о стохастических эффектах в сверхизлучении, обсуждаются флуктуации формы и времени задержки сигнала сверхизлучения [3]. В работе [4] рассматривались пространственные особенности сверхизлучения и говорилось о стохастической многолепестковой (лучевой) структуре сигнала сверхизлучения. Указанные проявления стохастичности связаны с развитием неустойчивости инвертированного состояния атомов по отношению к спонтанному распаду в общий термостат и с шумами в начальных условиях. После первого этапа развития неустойчивости возникает регулярное поведение сигнала сверхизлучения во времени и формируется либо моноимпульсный режим сверхизлучения, либо многоимпульсный, или осцилляторный, режим. В работе рассматривается новый режим сверхизлучения, который можно называть стохастическим режимом и который является проявлением детерминированного хаотического поведения в многоимпульсном сверхизлучении.

1. О регулярном и хаотическом поведении динамической системы

Кратко обсудим, что означает регулярное и хаотическое поведение динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями типа

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

в N -мерном фазовом пространстве в условиях, когда все параметры системы являются регулярными величинами и справедлива теорема Коши: каждому начальному условию

$$x_i(t=0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

отвечает единственное решение уравнений (1). Допустим, что состояние системы можно измерять со сколь угодно высокой, но конечной точностью δ , и поэтому

начальное состояние системы характеризуется не числами (2), а некоторым (пусть очень узким) распределением этих параметров. Тогда задача динамики такой системы состоит в предсказании (расчете) этого распределения в произвольный момент времени на основе известного начального распределения. Если со временем начальное распределение не «расплывается», то есть не увеличивается его ширина, то поведение системы является полностью детерминированным, или регулярным, – в любой момент времени состояние системы можно предсказать с той же точностью, с которой задано начальное распределение ее параметров. В противном случае, когда со временем ширина распределения увеличивается все больше и больше, поведение системы оказывается чувствительным к начальным данным. Если при этом фазовый объем системы ограничен, то траектории системы «перепутываются», а состояние системы при больших временах оказывается полностью непредсказуемым. Внешне такое поведение системы выглядит как случайное, и о нем говорят как о детерминированном стохастическом поведении, или динамическом хаосе.

«Нерасплывание» траектории связано с понятием устойчивости траекторий по Ляпунову. Зададимся некоторым начальным состоянием динамической системы в момент времени $t = 0$, характеризуемой точкой P_0 в фазовом пространстве. Обозначим через P_{0i} близкие точки в фазовом пространстве размерности N , характеризующие малые независимые смещения точки P_0 , а через P и P_i – точки, описывающие состояние динамической системы в момент времени t , то есть расположенные на фазовых траекториях, проходящих через точки P_0 и P_{0i} и отстоящих от них по времени на величину t . Пусть величина $\rho(P, P')$ обозначает расстояние между точками фазового пространства. Тогда можно ввести N показателей Ляпунова Λ_i как величины, определяющие расхожимость точек в фазовом пространстве размерности N . Грубо говоря, показатель Ляпунова определяет такую зависимость расстояний между точками близких траекторий, как $\rho(P, P_i) \sim \rho(P_0, P_{0i}) \exp(\Lambda_i t)$. Отрицательные показатели Ляпунова характеризуют устойчивые траектории, тогда как для неустойчивой траектории один или более показателей Ляпунова положительны.

Даже при такой сжатой характеристике динамического хаоса видно, что важнейшую роль в природе детерминированной стохастической динамики играет поведение фазового объема системы. Если фазовый объем системы сохраняется со временем и для такой системы может быть определена функция Гамильтона, то стохастизация такой системы связана с количеством независимых переменных и отличием системы от точно интегрируемого случая. Теория возмущений, резонансы, их перекрытие и взаимодействие являются основой для анализа стохастичности, которая здесь проявляется в виде стохастических слоев вблизи сепаратрис, их слияния, диффузии Арнольда и пр. [5].

Для диссипативных систем объем фазового пространства сжимается и геометрическим образом стохастического движения является странный аттрактор – ограниченное замкнутое множество, состоящее из неустойчивых траекторий. Для того чтобы его охарактеризовать, обычно привлекают целую иерархию разного рода размерностей, например, хаусдорфову размерность d_H :

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M(\varepsilon)}{1/\varepsilon}.$$

Здесь $M(\varepsilon)$ – минимальное число N -мерных кубов со стороной ε , необходимых для покрытия некоторого множества S , например странного аттрактора, в N -мерном пространстве. При малых величинах ε имеем: $M(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_H}$. Хаусдорфова размерность странного аттрактора тесно связана с показателями Ляпунова и почти всегда

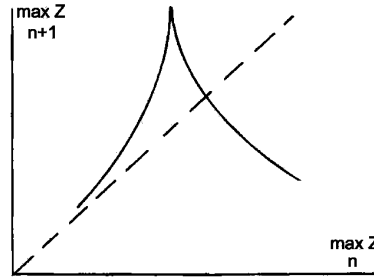


Рис. 1. Одномерное отображение для уравнений Лоренца

оказывается дробной. Типичными множествами с дробной размерностью являются множества, определяемые масштабной инвариантностью – при соответствующем изменении масштаба любое (сколь угодно малое) подмножество выглядит так же, как исходное множество, то есть целое подобно сколь угодно малой своей части. Примерами здесь служат канторово множество и кривая Коха [5–7].

Стандартным методом исследования динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями (1), является построение отображения Пуанкаре и его анализ. Выберем поверхность, которую решение (1) (то есть фазовая траектория) пересекает под ненулевым углом, и поставим каждой точке Y_n пересечения выделенной поверхности траекторией следующую точку пересечения Y_{n+1} . В результате получим отображение $Y_{n+1} = F(Y_n)$, эффективно уменьшающее размерность системы на единицу, тогда как обычная дискретизация уравнений (1) сохраняет размерность системы.

При исследовании динамики в ограниченной области фазового пространства можно получить одномерные отображения, если ставить в соответствие максимальной (минимальной) величине m_n какой-либо переменной, например x_i , следующую максимальную (минимальную) величину m_{n+1} той же переменной по ходу фазовой траектории.

Описанию закономерностей одномерных отображений посвящена книга [8].

2. Уравнения Лоренца

Вместо того, чтобы всякий раз изучать отображения, связанные с той или иной динамической системой, можно пытаться сводить исследуемую систему к уже известным. Одной такой хорошо изученной системой является система уравнений Лоренца. Выведенная из гидродинамических уравнений для описания конвекции Рэлея – Бенера система уравнений Лоренца описывает также лазерную генерацию. Запишем уравнения Лоренца в виде

$$\frac{dX}{dt} + \bar{\sigma}X = \bar{\sigma}Y, \quad \frac{dY}{dt} = -Y - XZ + \bar{\tau}X, \quad \frac{dZ}{dt} = XY - \bar{b}Z. \quad (3)$$

Система уравнений Лоренца полностью исследована и ей посвящена монография [9]. Кроме того, уравнения Лоренца служат базовыми примерами в математических пакетах типа MAPLE и MATLAB.

Если построить одномерное отображение максимального значения координаты в зависимости от предыдущего максимального значения по фазовой траектории, то получится график, представленный на рис. 1.

Перечислим очевидные свойства системы (3): симметрии $X, Y, Z \rightarrow -X, -Y, Z$; траектории, начинающиеся на оси Z , на ней и остаются; объем V фазового

пространства сжимается как $V \rightarrow V_0 \exp(-(\bar{\sigma} + \bar{b} + 1)t)$. Стационарные точки: $0 < \bar{r} < 1$ – глобальная устойчивость аттрактора $(0, 0, 0)$, при $1 < \bar{r}$ появляются две новые стационарные точки C_1 и C_2 , $(\pm\sqrt{\bar{b}(\bar{r}-1)}, \pm\sqrt{\bar{b}(\bar{r}-1)}, \bar{r}-1)$, причем C_1 и C_2 устойчивы для $\bar{r} < \bar{r}_c = \bar{\sigma} \frac{\bar{\sigma} + \bar{b} + 3}{\bar{\sigma} - \bar{b} - 1}$ и неустойчивы для $\bar{r}_c < \bar{r}$. Именно в этой области значений параметров находятся различные нетривиальные решения (3), в том числе стохастические режимы [9].

3. Модель стохастизации осцилляторного режима сверхизлучения

Обычный полуклассический подход к описанию сверхизлучения состоит в использовании двухуровневой модели атомов и приближения среднего поля [2, 3]. Предполагается, что в некоторый начальный момент времени $t = 0$ заселен верхний энергетический уровень E_s . Такое состояние атомов является неустойчивым, и вследствие малых флуктуаций поляризации и/или поля атомы переходят на нижний энергетический уровень E_m с испусканием фотонов. В случае одного атома характерное время перехода и есть время спонтанного излучения атома. В случае большой плотности N атомов время излучения сокращается обратно пропорционально числу возбужденных атомов, а интенсивность излучения возрастает пропорционально квадрату инвертированных атомов. Меняется также его форма и возникает характерное время задержки импульса. При этом уравнения полуклассической модели можно свести к уравнениям движения нелинейного маятника с трением. В случае малого трения и начального условия, отвечающего неустойчивому положению равновесия, получаются решения, выражаемые через эллиптические функции Якоби. Они весьма чувствительны к начальным флуктуациям, но после описания выхода маятника из неустойчивого состояния демонстрируют только затухающую регулярную периодическую динамику. Этими решениями описывается осцилляторный режим сверхизлучения. В случае большого трения решения передемфированного нелинейного маятника сводятся к гиперболическому секансу, форма которого нечувствительна к малым флуктуациям начальных условий и отвечает моноимпульсному режиму сверхизлучения. Во всех указанных случаях уравнения модели в приближении среднего поля и дополнительных предположениях [2, 3, 10] можно свести к уравнениям Лоренца (3) с параметрами

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma_{sm}}, \quad \bar{b} = \frac{\gamma_{ss}}{\gamma_{sm}}, \quad \bar{r} = -n^{(0)} \frac{\omega_c \omega}{\sigma \gamma_{sm}} \quad (4)$$

для следующих величин (придерживаемся обозначений работ [10, 11]):

$$X = \frac{\Omega}{\gamma_{sm}}, \quad Y = \frac{2\omega_c \omega}{\sigma \gamma_{sm}} r, \quad Z = (n - n^{(0)}) \frac{\omega_c \omega}{\sigma \gamma_{sm}}, \quad \iota = \gamma_{sm} t. \quad (5)$$

Здесь константы γ_{sm} и γ_{ss} характеризуют скорость релаксации амплитуды $R_{sm} = -R_{sm}^* = -ir$ недиагональной матрицы плотности (поляризации) $\varrho_{sm} = R_{sm} \exp(-i\omega_{sm}t)$ и перенаселенности $n = \varrho_{mm} - \varrho_{ss}$ атомных уровней; $n^{(0)}$ – стационарная перенаселенность, для неинвертированной среды $n^{(0)} > 0$; $\omega = \omega_{sm}$ – частота сверхизлучения, σ^{-1} – время жизни фотона в среде; $\omega_c = 2\pi N |d_{sm}|^2 \hbar^{-1}$ – кооперативная частота, d_{sm} – дипольный момент сверхизлучающего перехода; $\Omega = 2d_{sm} \mathcal{E} \hbar^{-1} = \Omega^*$ – частота Раби, \mathcal{E} – амплитуда электрического поля сверхизлучения.

Видно, что в обычном случае параметр \bar{r} отрицателен и никаких стохастических режимов в стандартной модели сверхизлучения в приближении среднего

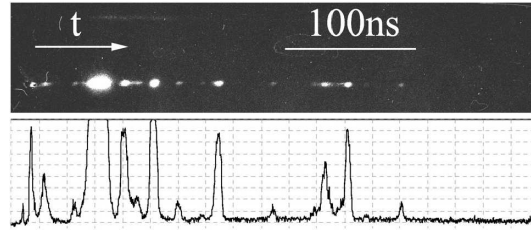


Рис. 2. Хронограмма и денситограмма сверхизлучения $\text{LaF}_3:\text{Pr}^{3+}$

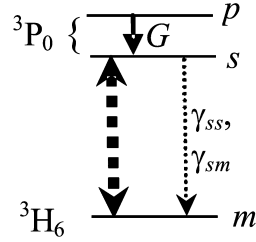


Рис. 3. схема энергетических уровней модели с верхним расщепленным уровнем

поля нет. В исследованиях [12, 13] сообщалось о моноимпульсном характере сверхизлучения кристалла $\text{LaF}_3:\text{Pr}^{3+}$. Однако экспериментальные исследования [10] сверхизлучения ионов празеодима в матрице трехфтористого лантана показывают, что излучение на частоте перехода ${}^3P_0 - {}^3H_6$ ионов празеодима имеет пиковую стохастическую структуру (рис. 2).

Для объяснения такого характера сверхизлучения естественно предположить, что сверхизлучающий уровень 3P_0 расщеплен на два близких подуровня – накачиваемый E_p и сверхизлучающий E_s . Сверхизлучающий подуровень E_s заселяется в результате безизлучательного перехода с накачиваемого подуровня E_p , скорость которого равна G (рис. 3). Тогда для временного интервала $t < G^{-1}$ в случае малых значений параметра G можно уравнения модели с верхним расщепленным уровнем свести к уравнениям Лоренца (3) с параметрами (4) и (5), за исключением следующих:

$$\bar{\tau} = G \frac{\omega \omega_c}{\sigma \gamma_{ss} \gamma_{sm}} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad Z = \left(\frac{G}{\gamma_{ss}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + n \right) \frac{2|d_{sm}|^2 \pi \omega N \hbar^{-1}}{\sigma \gamma_{sm}}. \quad (6)$$

Здесь θ – площадь когерентного импульса, накачивающего уровень E_p .

Теперь основной параметр $\bar{\tau}$, определяющий нетривиальные решения уравнений Лоренца, может быть в области, соответствующей стохастическим решениям (3). На рис. 4 представлены результаты численного решения исходных уравнений модели сверхизлучения с верхним расщепленным уровнем [11], наглядно демонстрирующие нерегулярность в поведении пиков сигнала сверхизлучения.

Следует заметить, что со спектроскопической точки зрения каких-либо зеемановских или штарковских подуровней у уровня 3P_0 уже быть не может, хотя используемая классификация уровней, строго говоря, справедлива для одноэлектронного приближения и при наличии симметрии по отношению к вращению.

Описанная схема с верхним расщепленным уровнем может быть реализована, если предположить образование своеобразных кластеров из двух ионов, располагающихся в решетке трехфтористого лантана в пространственно неэквивалентных конфигурациях. О существовании таких конфигураций ионов празеодима говорят

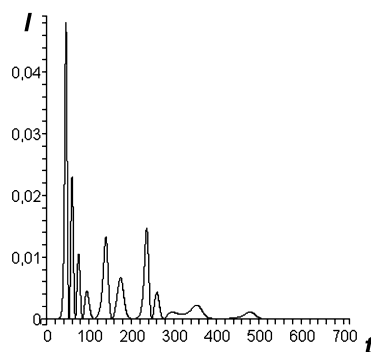


Рис. 4. Расчетная интенсивность сверхизлучения

спектроскопические данные [14]. При низких температурах происходит туннелирование иона празеодима между пространственно неэквивалентными положениями, что и обуславливает безизлучательный переход между ними и неравноправность подуровней E_s и E_p по отношению к излучению. Известно, что такой механизм имеет место в кристаллах оксиортосиликатов [15]. Таким образом, наличие хаотической динамики в осцилляторном режиме сверхизлучения позволяет сделать определенные выводы о спектроскопических особенностях уровней иона празеодима в матрице трехфтористого лантана в рассматриваемой области спектра.

Отметим также, что отличия в результатах экспериментов [10] и [12, 13] могут быть объяснены разным углом падения накачки на кристалл, различием в плотности ионов празеодима и температуры образца.

Наконец, важно отметить следующее обстоятельство. Говорить в строгом смысле о стохастическом режиме во всем временном диапазоне в случае сверхизлучения не приходится, поскольку энергия в диссипативную излучающую систему закачивается импульсным образом и понятно, что рано или поздно какое-либо излучение из системы закончится, а излучатели системы перейдут в основное стационарное состояние. Здесь проявляется основное отличие случая сверхизлучения от случая стационарной лазерной генерации, при которой подкачка энергии в диссипативную систему осуществляется непрерывно и которая в ряде случаев на всем временном интервале может быть описана уравнениями Лоренца (3) с параметрами, отвечающими хаотическому режиму [16]. Тем не менее в определенных временных интервалах в сверхизлучении также можно обсуждать и вопросы устойчивости, и такой признак детерминированной хаотической динамики, как экспоненциальное разбегание близких траекторий в фазовом пространстве.

Автор выражает благодарность профессору В.В. Самарцеву за приглашение прочитать лекцию на XI Международной молодежной научной школе «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия».

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-02-16147-а).

Summary

A.M. Basharov. Deterministic Chaotic Dynamics of Superradiance.

The model of superradiance exhibiting the features of deterministic chaotic behavior was developed. The equations of the model were reduced to the Lorenz equations with parameters corresponding to stochastic regime.

Key words: deterministic and stochastic dynamics, Superradiation, oscillatory mode, stochastization, Lorenz equations.

Литература

1. *Dicke R.H.* Coherence in spontaneous radiation processes // *Phys. Rev.* – 1954. – V. 93. – P. 99–111.
2. *Andreev A.V., Emel'yanov V.I., Il'inskiy Y.A.* Cooperative Effects in Optics. – Bristol and Philadelphia: IOP Publ., 1993. – 467 p.
3. *Benedict M.G., Ermolaev A.M., Malyshev V.A., Sokolov I.V., Trifonov E.D.* Superradiance: Multiatomic Coherent Emission. – Bristol and Philadelphia: IOP Publ., 1996. – 326 p.
4. *Аветисян Ю.А., Трифонов Е.Д.* Поляризационная и дифракционная структура сверхфлуоресценции // *Оптика и спектр.* – 1999. – Т. 86, № 5. – С. 842–850.
5. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
6. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1984. – 253 с.
7. *Башаров А.М.* Фотоника. Самопульсации и хаос в оптических системах. – М.: МИФИ, 1986. – 83 с.
8. *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems. – Boston: Birkhauser, 1980. – 248 p.
9. *Sparrow C.* The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. – Springer-Verlag, 1983. – 269 p.
10. *Башаров А.М., Григорян Г.Г., Знаменский Н.В., Манькин Э.А., Орлов Ю.В., Шашков А.Ю., Юкина Т.Г.* Пичковая структура когерентного излучения оптически плотных сред // *ЖЭТФ.* – 2006. – Т. 129, Вып. 2. – С. 239–253.
11. *Башаров А.М., Знаменский Н.В., Шашков А.Ю.* Модель стохастизации осцилляторного режима сверхизлучения // *Оптика и спектр.* – 2008. – Т. 104, № 2. – С. 279–286.
12. *Zuikov V.A., Kalachev A.A., Samartsev V.V., Shegeda A.M.* Optical superradiance in $\text{LaF}_3:\text{Pr}^{3+}$ -crystal. // *Laser Phys.* – 1999. – V. 9, No 4. – P. 951–954.
13. *Zuikov V.A., Kalachev A.A., Samartsev V.V., Shegeda A.M.* Two-Color Optical Superradiance and Other Coherent Effects in the Resonant Propagation of a Laser Pulse in a $\text{LaF}_3 : \text{Pr}^{3+}$ Crystal // *Laser Phys.* – 2000. – V. 10, No 1. – P. 364–367.
14. *Знаменский Н.В., Малюкин Ю.В.* Спектры и динамика оптических переходов редкоземельных ионов в кристаллах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 192 с.
15. *Malyukin Yu.V., Masalov A.A., Zhmurin P.N., Znamenskii N.V., Petrenko E.A., Yukina T.G.* Two mechanisms of 1D2 fluorescence quenching of Pr^{3+} -doped Y_2SiO_5 crystal // *Phys. Stat. Sol. (b).* – 2003. – V. 240, No 3. – P. 655–662.
16. *Хакен Г.* Лазерная светодинамика. – М.: Мир, 1988. – 350 с.

Поступила в редакцию
08.02.08

Башаров Асхат Масхудович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник РНЦ «Курчатовский институт».

E-mail: basharov@gmail.com